離散数学

田村直之 (神戸大学工学部)

0 はじめに

0.1 離散数学とは

離散 (discrete) とは

小学館英和中辞典

dis-crete *adj.*

1 分離している，別個の; はっきり区別されている; 組み合わされていない．

2 別個の部分からなる; 不連続の，非関連の．

離散数学 (discrete mathematics) とは

連続でない対象を取り扱う数学のこと．コンピュータの発達により離散的数理モデルが重要になってきた．情報数学，計算機数学と呼ばれることもある．

0.2 離散数学の応用例

- グラフ理論 (一筆書き，平面的グラフ，四色定理，最短経路)
- 形式言語 (自然言語処理の字句解析)
- 代数系 (符号理論)
- 命題計算，ブール代数 (論理回路の同値性)
- 整数論 (暗号化)
- 組合せ論 (ブロックデザイン)
- 計算幾何
- 計算量理論 (ネヴァンリンナ賞)

0.3 記法

- $\forall x; P$: すべての x について Pである．
- $\exists x; P$: ある x について Pである．
- $\forall x \in A; P$: 集合 A のすべての要素 x について Pである．
- $\exists x \in A; P$: 集合 A のある要素 x について Pである．
- $P \Longrightarrow Q$: Pならば Q である．
- $P \Longleftrightarrow Q$: Pと Q は同値，つまり $P \Longrightarrow Q$ かつ $Q \Longrightarrow P$である．

0.4 参考書

- 野崎昭弘「離散系の数学」コンピュータサイエンス大学講座 10，近代科学社
- 高橋磐郎・藤重悟「離散数学」岩波講座 情報科学 17，岩波書店
- 田澤新成・白倉暉弘・田村三郎「やさしいグラフ論 パズルを題材として」現代数学社
- 寺阪英孝 編「現代数学小辞典」ブルーバックス B325，講談社

1 集合論

1.1 集合 (set) と要素 (element)

メモ (カントールの素朴集合論 (1895))

> “集合とは，われわれの直観または思考の対象で，確定していて，互いに明確に区別されるものを一つの全体としてまとめたものである”
>
> すなわち，Sが集合と呼ばれるためには，次の二つの条件をみたすことが要求されている．
>
> - 任意の思考の対象 x について所属が確定している．$x \in S$であるか $x \notin S$であるかが明確に規定されている．
> - Sの任意の要素 x, yが明確に区別されている．$x = y$であるか $x \neq y$ であるかが明確に規定されている．
>
> 以上の条件をみたすのであれば，任意の条件 $C(x)$ に対して集合 $\{x : C(x)\}$ が存在すると考える (内包の公理)．これは，あまりに素朴過ぎ，あとで矛盾が生じることとなった．

集合の表記

列挙 $\{2, 4, 6, 8\}$

条件 $\{x : x \text{ は 10 未満の偶数 }\}$

良く使用する集合については以下のように表記する．

$$
\begin{aligned}
\mathbf{N} &= \{x : x \text{ は正の整数 }\} \\
\mathbf{Z} &= \{x : x \text{ は整数 }\} \\
\mathbf{Q} &= \{x : x \text{ は有理数 }\} \\
\mathbf{R} &= \{x : x \text{ は実数 }\} \\
\mathbf{C} &= \{x : x \text{ は複素数 }\}
\end{aligned}
$$

自然数と言ったとき，0 を含めることがある．$\mathbf{N}$ は 0 を含めない．

メモ (ファジィ集合)

$$\{x : x \text{ は背の高い日本人 }\}$$

ファジィ集合 (ザデー 1965): 集合への要素の帰属度を 0〜1 の連続値で表す.

1.2 普遍集合 (universal set), 空集合 (empty set)

定義 (普遍集合, 空集合)

- 普遍集合, 論議領域, 全体集合 U: 考察中のすべての要素全体からなる集合
- 空集合 ϕ: 要素がない集合

1.3 部分集合 (subset)

定義 (部分集合)

A は Bの部分集合, $A \subset B$, $B \supset A$:

$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A;\ x \in B$$

注意: $A = B$の場合も含む. $A \subset B$かつ $A \neq B$のとき, A を Bの真部分集合という.

定理 1.1

(i) $\phi \subset A \subset U$

(ii) $A \subset A$ (反射的)

(iii) $A \subset B$かつ $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$ (推移的)

(iv) $A \subset B$かつ $B \subset A \Longleftrightarrow A = B$ (反対称的)

32 ページ参照.

1.4 ベン図

1.5 集合演算

定義 (和集合, 共通集合, 差集合, 補集合)

和集合	$A \cup B$	$=$	$\{x : x \in A$ または $x \in B\}$
共通集合 (積集合)	$A \cap B$	$=$	$\{x : x \in A$ かつ $x \in B\}$
差集合	$A \setminus B = A - B$	$=$	$\{x : x \in A$ かつ $x \notin B\}$
補集合	A^c	$=$	$U \setminus A$

$A \cap B = \phi$のとき, A と Bは互いに素という.

定理 1.2

$$A \subset B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B$$

1.6　集合代数と双対性

定理 1.3

教科書の表を参照．

双対原理

$$\text{等式 } E \text{が恒等式} \implies \text{双対 } E^* \text{が恒等式}$$

Eの双対 E^*は，$\cap \leftrightarrow \cup$，$U \leftrightarrow \phi$の置き換えによって得られる．

1.7　有限集合，数え上げの原理

定義（有限集合，無限集合）

$$\begin{aligned} A \text{ が有限集合} \quad &\iff \quad \text{ある整数 } m > 0 \text{ について，} A \text{ がちょうど } m \text{ 個の要素を含む} \\ A \text{ が無限集合} \quad &\iff \quad A \text{ が有限集合でない} \end{aligned}$$

定義（有限集合 A の要素の個数）

$$n(A) = \#(A) = \text{有限集合 } A \text{ の要素の個数}$$

55 ページも参照．

補題 1.4

A，Bが互いに素な有限集合ならば，$A \cup B$は有限集合であり，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

定理 1.5

A，Bが有限集合ならば，$A \cup B$と $A \cap B$は有限集合であり，

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

1.8 集合の類 (class)，べき集合 (power set)

定義 (集合の類)

- 集合の類，集合族: 集合の集合
- 部分類，部分集合族: 集合の類の部分集合

定義 (べき集合)

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = A \text{ のすべての部分集合からなる類}$$

命題

A が有限集合ならば，$\mathcal{P}(A)$ は有限集合であり，

$$n(\mathcal{P}(A)) = 2^{n(A)}$$

メモ (ラッセルのパラドックス)

素朴集合論では，内包の公理により，任意の条件 $C(x)$ に対して集合 $\{x : C(x)\}$ が存在すると考える．そうすると次のようにしてパラドックスが生じる．

$S = \{x : x \notin x\}$ とする．Sは Sの要素か?

i) $S \in S$とする．Sの任意の要素 x は，$x \notin x$ の条件を満たすから，$S \notin S$となり，矛盾．

ii) $S \notin S$とする．Sは，$x \notin x$ の条件を満たすから，Sの要素である．したがって，$S \in S$となり，矛盾．

いずれにしても矛盾する．

グレリングは，このパラドックスを次のように言い換えた．

> 「形容詞 A は，それ自身が A という性質を持たないとき heterological (他叙的) であると呼び，heterological でないとき autological (自叙的) と呼ぶ (例: French, long は他叙的，English, four-syllabic は自叙的)．“heterological” という形容詞は heterological か?」

1.9 論証とベン図

1.10 数学的帰納法 (mathematica induction)

定義 (数学的帰納法)

- 数学的帰納法 I
  正の整数 n に関する任意の命題 $P(n)$ について，

  (i) $P(1)$ は真，
  (ii) $P(n)$ が真のとき $P(n+1)$ が真

  ならば，$\forall n \in N;\ P(n)$ がいえる．

- 数学的帰納法 II
  正の整数 n に関する任意の命題 $P(n)$ について，

  (i) $P(1)$ は真，
  (ii) $1 \leq k < n$ のすべての kについて $P(k)$ が真のとき $P(n)$ が真

  ならば，$\forall n \in N;\ P(n)$ がいえる．

$P(0)$ を含む場合も同様である．

メモ (数学的帰納法の誤った使用例)

数学的帰納法の使い方を誤ると次のように誤った結論を得てしまう．

(例 1) 定理「すべての人はハゲ頭である.」
髪の毛の本数 $n \geq 0$ についての数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 0$ のとき，明らかにハゲ頭である．
(ii) 髪の毛が n 本の人がハゲ頭とすると，$n+1$ 本でもあまり変わらないのでハゲ頭である．

よって，髪の毛が何本あってもハゲ頭である．

(例 2) 定理「白黒の碁石の山から，いくつかの碁石を取り出すとき，どのように碁石を取り出しても，白ばかりか黒ばかりの同色になる.」取り出す碁石の個数 n についての数学的帰納法で証明する．

(i) $n = 1$ のとき，明らかに同色になる．

(ii) どのように n 個取り出しても同色になると仮定して，$n+1$ 個取り出した場合，任意の 1 個を取り除くと残りは仮定により同色である．別の 1 個を取り除いてもやはり同色であるから，$n+1$ 個すべてが同色である．

よって，任意の n 個について同色であると言える．

(例 3) 定理

$$\forall n \in N;\, a^{n-1} = 1$$

(i) $n = 1$ のとき，$a^{n-1} = a^0 = 1$.

(ii) $1,\ 2, \cdots,\ n$ について定理が正しいと仮定して，$n+1$ について

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \cdot a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \cdot 1}{1} = 1$$

よって定理が証明された．

(例 4) 定理

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}$$

(i) $n = 1$ のとき，$\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{1}$.

(ii) n について定理が正しいと仮定して，$n+1$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ = \ & \frac{2}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ = \ & \frac{2}{3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ = \ & \frac{2}{3} - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

よって定理が証明された．ところが $n = 6$ のとき，左辺 $= \frac{5}{6}$，右辺 $= \frac{4}{3}$.

2　関係

2.1　序

2.2　直積集合 (product set)

定義（直積，デカルト積）

$$
\begin{aligned}
A \times B &= \{(a,b) : a \in A \text{ かつ } b \in B\} \\
A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n &= \Pi_{i=1}^{n} A_i \\
&= \{(a_1, a_2, \cdots, a_n) : a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,\ \cdots\ a_n \in A_n\} \\
A^n &= \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\text{ 個}}
\end{aligned}
$$

(a,b) を順序対，$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を順序 n 組と呼ぶ．

2.3　関係 (relation)

定義（2 項関係）

A から Bへの 2 項関係 Rを $A \times B$の部分集合で表す．

$$
\begin{aligned}
xRy &\iff (x,y) \in R \\
x \not{R} y &\iff (x,y) \notin R
\end{aligned}
$$

xRyのとき，x と yは R-関係にあるという．$R \subset A \times A$ のとき，Rは A 上の関係であるという．

定義（定義域，値域）

- Rの定義域 (domain): $\{x : \exists y;\ (x,y) \in R\}$
- Rの値域 (range): $\{y : \exists x;\ (x,y) \in R\}$

定義（同等関係，全体関係，空関係）

- A 上の相等性，同等関係 $(=)$: $\{(a,a) : a \in A\}$
- A 上の全体関係: $A \times A$
- A 上の空関係: ϕ

2.4　関係の幾何学的表現

グラフ (関係の図表現)

(i) 座標図
(ii) 行列
(iii) 矢線図
(iv) 有向グラフ (集合上の関係のとき，138 ページ参照)

2.5　逆関係

定義 (逆関係)

$$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$$

命題

- $bR^{-1}a \iff aRb$
- $(R^{-1})^{-1} = R$
- R^{-1}の行列は Rの行列の転置

2.6　関係の合成

定義 (合成)

$$R \circ S = \{(a, c) : \exists b;\ (a, b) \in R \text{かつ} (b, c) \in S\}$$

命題

- $a(R \circ S)c \iff \exists b;\ aRb$ かつ bSc
- $R \circ S$の行列は，Rと Sの行列の積から求められる

定理 2.1

合成$\circ$は結合的である．

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$$

2.7 関係の性質

定義（反射的，対称的，反対称的，推移的）

集合 A 上の関係 Rについて

(1) 反射的: aRa

(2) 対称的: $aRb \Longrightarrow bRa$

(3) 反対称的: aRb かつ $bRa \Longrightarrow a = b$

(4) 推移的: aRb かつ $bRc \Longrightarrow aRc$

2.8 分割 (partition)

定義（分割）

集合 $S \neq \phi$の分割とは，次の (i)〜(iv) をみたす集合族 $\{A_i\}$ である．各 A_iは細胞 (cell) と呼ばれる．

(i) $\forall a \in S; \exists A_i; a \in A_i$

(ii) $\{A_i\}$ の各集合は互いに素である．$A_i \neq A_j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \phi$

(iii) $A_i \subset S$

(iv) $A_i \neq \phi$

2.9 同値関係

定義（同値関係）

同値関係: 反射的，対称的かつ推移的な関係

例

- $x \equiv y \pmod{m}$

2.10 同値関係と分割

定義（同値類，商集合）

Rを A 上の同値関係とするとき，

- 同値類: $[a] = \{x : (a, x) \in R\}$
- 商集合: $A/R = \{[a] : a \in A\}$

定理 2.2

Rを A 上の同値関係とするとき，商集合 A/Rは A の分割であり，

(i) $a \in [a]$
(ii) $[a] = [b] \Longleftrightarrow (a, b) \in R$
(iii) $[a] \neq [b] \Longrightarrow [a] \cap [b] = \phi$

2.11 半順序関係

定義（半順序関係）

半順序関係: 反射的，反対称的かつ推移的な関係 (209 ページ参照)

例

- “a は b を割り切る” という関係 $a \mid b$

2.12 n 項関係

3 関数

3.1 序

3.2 関数

- A から Bへの関数 $f : A \to B$
- fの定義域 (domain): A
- fの値域 (range): B
- $a \in A$ に対する fの値，a の像: $f(a)$
- fの像: $\mathrm{Im}(f) = f(A) = \{f(x) : x \in A\}$

関数の表現

例で説明する．

- $f(x) = x^2$
- $f : x \mapsto x^2$
- $y = x^2$

x は独立変数，yは従属変数と呼ばれる．

定義 (恒等関数)

$$\text{集合 } A \text{ 上の恒等関数 } 1_A : x \mapsto x$$

3.3 関数のグラフ

関数を関係の一種として定義することもできる．

定義 (関数)

A から Bへの関係 fが次の条件をみたすとき，A から Bへの関数という．

$$(a, b) \in f \text{かつ } (a, b') \in f \Longrightarrow b = b'$$

- グラフ
- 合成

$$(g \circ f)(a) = g(f(a))$$

$$f \circ 1_A = f = 1_B \circ f$$

3.4 1対1の関数，上への関数，および逆関数

定義（単射，全射，全単射，可逆）

関数 $f : A \to B$について

- 単射 (1対1，1-1，one to one): $f(a) = f(a') \Longrightarrow a = a'$のとき
- 全射 (上への，onto): $f(A) = B$のとき
- 全単射 (1対1対応): 単射かつ全射のとき
- 可逆: 逆関係 f^{-1}が関数のとき

定理 3.1

$$\text{関数 } f\text{が可逆} \Longleftrightarrow \text{関数 } f\text{が全単射}$$

3.5 添数付き集合族

定義（添数付き集合族）

- 添数関数 f: 添数集合 Iから集合族 Sへの関数 $I \to S$
- 像 $f(i)$ を A_iであらわす
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I;\ x \in A_i\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I;\ x \in A_i\}$

3.6 基数 (cardinal number)

定義（基数，濃度）

- 集合 A と Bが同じ基数 (濃度) を持つ: A と Bの間に1対1対応が存在する
- 集合 A の基数　$|A|,\ n(A),\ \#(A),\ \mathrm{card}(A)$

命題

- $|\phi| = 0$
- $|\{1, 2, \cdots, n\}| = n$
- $|\mathbf{N}| = \aleph_0$ (アレフゼロ，ヘブライ語の第 1 アルファベット)

定義（有限集合，無限集合，可算無限集合，非可算無限集合，可算集合）

- 有限集合 (finite): 空集合または $\exists n \in \mathbf{N};\ \{1, 2, \cdots, n\}$ と同じ基数を持つとき
- 無限集合 (infinite): 有限集合でないとき
- 可算無限集合: $\aleph_0$ と同じ基数を持つ集合のとき
- 非可算無限集合: 可算でない無限集合のとき
- 可算集合 (countable): 有限集合または可算無限集合のとき

メモ（デデキントによる無限集合の定義）

無限集合: 真部分集合のうち同じ基数を持つものが存在する集合

例 3.6

- $|$ 偶数の集合 $| = \aleph_0 \quad (f(n) = 2n)$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \mathbf{N} & = & \{ & 1 & , & 2 & , & 3 & , & \cdots & \} \\ & & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & & \\ \textbf{偶数の集合} & = & \{ & 2 & , & 4 & , & 6 & , & \cdots & \} \end{array}$$

- $|\mathbf{Z}| = \aleph_0$

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ 0, & 1, & -1, & 2, & -2, & \cdots \end{array}$$

定理 3.2

可算集合の可算和は可算である．

メモ（有理数の濃度）

- $|\mathbf{N} \times \mathbf{N}| = \aleph_0$

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - 2)(x + y - 1) + y$$

- $|\mathbf{Q}| = \aleph_0$
- $|\mathbf{Z} \times \cdots \times \mathbf{Z}| = \aleph_0$

定理 3.3

$\mathbf{I} = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < 1\}$ は非可算である．

証明 可算とすると，$\mathbf{I}$ と $\mathbf{N}$ の間に 1 対 1 対応がある．

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 0.1000\cdots \\ 2 & \leftrightarrow & 0.2345\cdots \\ 3 & \leftrightarrow & 0.1415\cdots \\ 4 & \leftrightarrow & 0.6789\cdots \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$\mathbf{I}$ の i 番目の要素の小数点以下 i 桁目を 1 大きい数字にする (ただし 9 のときは 0)．

$$0.2420\cdots$$

この値は，$\mathbf{I}$ の要素だが，列挙した値のすべてと異なっている．矛盾．よって $\mathbf{I}$ は非可算である (対角線論法)．

メモ (実数の濃度)

- $|\mathbf{R}| = |\mathbf{I}|$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) & (x \geq 0) \\ -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{1-x}\right) & (x < 0) \end{cases}$$

- $|\mathbf{R}| = \aleph$ (アレフ，連続体の濃度)，$\aleph > \aleph_0$
- $|\mathbf{I} \times \cdots \times \mathbf{I}| = \aleph$

$$\begin{array}{c} (0.m_1m_2m_3\cdots,\ 0.n_1n_2n_3\cdots) \\ \updownarrow \\ 0.m_1n_1m_2n_2m_3n_3\cdots \end{array}$$

連続的な対応は存在しないことがわかっている．

- $|\mathbf{R} \times \cdots \times \mathbf{R}| = \aleph$

メモ (べき集合の濃度)

- $|\mathcal{P}(\mathbf{N})| = |\mathbf{I}| = \aleph$
  $\mathbf{I}$ の要素を 2 進小数であらわす．
  $$0.m_1 m_2 m_3 \cdots$$
  これと集合 $\{i : m_i = 1\} \in \mathcal{P}(\mathbf{N})$ を対応させる．
- 任意の集合 Xについて，$|\mathcal{P}(\mathbf{X})| > |X|$
  Xと $\mathcal{P}(X)$ の間に 1 対 1 対応があったと仮定する．このとき $x \in X$ に対応する $\mathcal{P}(X)$ の要素を A_xで表す．すると，$\{x \in X : x \notin A_x\}$ はすべての A_xと異なる．矛盾．
- 連続体仮説: $\aleph_0$と$\aleph$の間の濃度は存在しない．
  他の集合論公理から独立である (ゲーデル，コーエン)．

4　ベクトルと行列

4.1　序

4.2　ベクトル

4.3　行列

4.4　行列和とスカラー積

4.5　総和記号

4.6　行列積

4.7　転置行列

4.8　正方行列

4.9　正則行列

4.10　行列式

4.11　正則行列と行列式

5　グラフ理論

5.1　序

グラフとは

点および点と点を結ぶ線 (辺) だけからなる図形

- 一筆書き (ケーニヒスベルグの橋，オイラー 1736) p.96 参照
- グラフの平面性判定 p.117 参照
- 四色定理 p.119 参照
- 最短道 p.141 参照
- 組合せ問題への応用
  - 等次数定理: クラスの人数が何人でも，クラス中の友達の人数の等しい 2 人が必ずいる．
  - 円卓問題: 円卓会議に 5 つ $(2n+1)$ の国からそれぞれ $2(n)$ 名が出席するとき，各国の出席者の隣に，他の 4ヶ$(2n)$ 国の出席者が座るように配置できるか．
  - 5ℓと 3ℓのバケツを用いて 4ℓを量れ．

参考書

- 田澤新成 ほか著: 「やさしいグラフ論」 現代数学社
- 一松信 著: 「四色問題」 講談社ブルーバックス

5.2　グラフと多重グラフ

定義 (グラフ)

$G(V, E)$

(i) 頂点の集合 V

(ii) 頂点の非順序対 (辺と呼ばれる) の集合 E

辺 $e = \{v_1, v_2\}$ のとき，v_1, v_2は端点と呼ばれる．

定義 (多重グラフ)

多重辺，ループを持つように拡張されたグラフ．

定義（部分グラフ）

- 部分グラフ $G(V', E')$: $V' \subset V$かつ $E' \subset \{e \in E : e \subset V'\}$
- V'によようって生成された部分グラフ $G(V', E')$: $E' = \{e \in E : e \subset V'\}$

定義（有限グラフ，自明なグラフ）

- 有限グラフ: 有限個の頂点と有限個の辺を持つグラフ
- 辺を持たず，1 個の頂点からなるグラフ

以下ことわらない限り，有限グラフについて議論する．

5.3 次数

定義（次数）

- 頂点 vの次数 $\deg(v)$: vに接続する辺 (端点が vである辺) の個数

定義（奇頂点，偶頂点，孤立点）

- 奇頂点: 次数が奇数の頂点
- 偶頂点: 次数が偶数の頂点
- 孤立点: 次数が 0 の頂点

定理 5.1

任意のグラフ $G(V, E)$ について

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \times n(E)$$

メモ 握手原理

- 握手原理: パーティー出席者全員の握手の総和は，つねに偶数である．
- 奇頂点定理: グラフにおいて，奇頂点の数はつねに偶数である．
- パーティーの出席者の数が奇数ならば，偶数回握手した人が必ずいる．

メモ 部屋割り論法

n 室に $n+1$ 人以上の人を入れようとすれば，相部屋のところが必ずできる．

メモ 等次数定理

グラフにおいて，次数の等しい 2 頂点が存在する．
クラスの人数が何人でも，クラス中の友達の人数の等しい 2 人が必ずいる．
(証明) クラスの人数を n とする．全員に友達がいる場合．友達が i 人いる人を第 i 室に入れると，友達の数は最大でも $n-1$ である．したがって，部屋割り論法により友達の人数の等しい 2 人が存在する．友達のいない孤独な人がいる場合．孤独な人が 2 人以上であれば，彼らの友達の人数は 0 で等しい．孤独な人が 1 人の場合．その 1 人を除いた残りについて，全員に友達がいるから，最初の場合と同様に考えて友達の人数の等しい 2 人が存在することがいえる．

5.4　連結度

定義（歩道，小道，道，閉路）

多重グラフにおいて

- 歩道 (walk):
$$v_0, e_1, v_1, \ldots, e_n, v_n$$
ただし e_iは v_{i-1}と v_iを結ぶ辺．混乱のない限り
$$(v_0, v_1, \ldots, v_n)$$
$$(e_1, e_2, \ldots, e_n)$$
- 歩道の長さ: n
- 閉じた歩道: $v_0 = v_n$なるとき
- 小道 (trail): すべての辺が異なる歩道
- 道 (path): すべての頂点が異なる歩道 (道は必ず小道となる)
- 閉路 (cycle): $v_0 = v_n$を除いたすべての頂点が異なる閉じた歩道
- k-閉路: 長さ kの閉路

定理 5.2

$$u\text{から }v\text{への歩道が存在する} \Longleftrightarrow u\text{から }v\text{への道が存在する}$$

証明

($\Longrightarrow$) 歩道を $(v_0, v_1, \ldots, v_n)$ とする．すべての頂点が異なるなら，道である．$v_i = v_j$ $(i < j)$ のとき，$(v_0, \ldots, v_i, v_{j+1}, \ldots, v_n)$ は歩道である．すべての頂点が異なるまで，これを繰り返す．

($\Longleftarrow$) 道は歩道であるから自明．

定義（連結）

- 連結グラフ: 任意の 2 頂点間に道が存在するグラフ
- 連結成分: 部分グラフ Hが連結であり，Hを含んで Hより大きな連結部分グラフが存在しないとき，Hを連結成分と呼ぶ

定義（連結）

- u と vの距離 $d(u, v)$: u と vの最短道の長さ
- 連結グラフ $G(V, E)$ の直径: $\max_{u,v \in V} d(u, v)$

定義（切断点）

- $G - v$: グラフ G から頂点 vと vに接続するすべての辺を除いたグラフ
- 連結グラフ G の頂点 vが切断点: $G - v$が非連結のとき

5.5　ケーニヒスベルグの橋，周遊可能多重グラフ

定義（周遊可能，一筆書き可能）

- 周遊可能: すべての頂点すべての辺を含んだ小道 (周遊可能小道) が存在するとき

周遊可能グラフは有限で連結である．

定義（オイラーグラフ）

- オイラーグラフ: 閉じた周遊可能小道 (オイラー小道) が存在するグラフ

メモ ケーニヒスベルグの橋

現在カリーニングラード．教科書 96 ページの図を参照．

定理 (オイラー)5.3

$$\text{有限連結グラフがオイラーグラフである} \iff \text{すべての頂点が偶次数を持つ}$$

系 5.4

2 この奇頂点を持つ有限連結グラフは周遊可能である．周遊可能小道は一方の奇頂点から始まり，他方の奇頂点で終る．

メモ 円卓問題

円卓会議に 5 つ $(2n+1)$ の国からそれぞれ $2(n)$ 名が出席するとき，各国の出席者の隣に，他の 4ヶ$(2n)$ 国の出席者が座るように配置できるか．この問題は，国を頂点とする $2n+1$-完全グラフがオイラー小道を持つかという問題になる．これは，$2n+1$-完全グラフの頂点がすべて偶頂点であることと定理 5.3 からいえる．

定義 (ハミルトングラフ)

- ハミルトン道: すべての頂点を含む道
- ハミルトン閉路: すべての頂点を含む閉路
- ハミルトングラフ: ハミルトン閉路が存在するグラフ

メモ ハミルトンのパズル

アイルランドの数学者ハミルトンが 1857 年に次のようなパズルを出した．正十二面体 (20 個の頂点と 30 の辺を持つ) の各頂点をちょうど 1 回ずつ通って最初の頂点に戻る閉路を見い出せ．

メモ ハミルトングラフの条件

有効な必要十分条件は見つかっていないが，次のような定理がわかっている (オーレ，1960)．

$n \geq 3$ 個の頂点をもつグラフ G に対して，隣接していない異なったどの 2 頂点 x，yについても

$$\deg(x) + \deg(y) \geq n$$

ならば，G はハミルトン閉路を持つ．
(証明) 背理法により証明する．条件を満たすがハミルトン閉路を持たないグラフが存在すると仮定する．このようなグラフのうち辺の本数が最大のグラフを G とする．$n \geq 3$ のとき，n 頂点を持つ完全グラフ (各頂点が他のすべての頂点と結ばれているグラフ) はハミルトン閉路を持つ (数学的帰納法で簡単に証明できる) から，G は完全グラフではない．よって隣接していない異なった 2 頂点 x，yが存在する．

G に辺 $\{x, y\}$ を加えてできるグラフ Hはハミルトン閉路を持つ．なぜなら，Hがハミルトン閉路を持たないとすると，G の辺の本数に関する最大性に矛盾する．また，Hのどのハミルトン閉路も辺 $\{x, y\}$ を含む．なぜなら，G はハミルトン閉路を持たないから，辺 $\{x, y\}$ を含まないハミルトン閉路は存在しない．したがって，G に x から始まって yで終るハミルトン道 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $(x = x_1,\ y = x_n)$ が存在する．

このとき，もし $\{x, x_i\}$ $(2 \leq i \leq n-1)$ が G の辺ならば，$\{x_{i-1}, y\}$ は G の辺ではない．なぜなら，もしそうだとすると $x_1, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n$, $x_{i-1}, x_{i-2}, \cdots, x_1$は G のハミルトン閉路になる．G の辺 $\{x, x_i\}$ の個数は $\deg(x)$，G の辺ではない $\{x_{i-1}, y\}$ の数は $(n-1) - \deg(y)$ であるから，

$$\deg(x) \leq (n-1) - \deg(y)$$

これは，条件 $\deg(x) + \deg(y) \geq n$ に矛盾する．

よって定理が成立する．

5.6　特殊なグラフ

定義（完全グラフ，正則グラフ）

- 完全グラフ: 各頂点が他のすべての頂点と結ばれているグラフ
- K_n: n 頂点からなる完全グラフ
- k-正則グラフ: すべての頂点の次数が kのグラフ

命題

- K_nの全ての頂点 vについて，$\deg(v) = n - 1$
- K_nの辺の個数は，$\frac{1}{2}n(n-1)$

定義 (2 部グラフ)

- 2 部グラフ: 頂点集合 Vが M，Nに分割され，かつ各辺が Mの頂点と Nの頂点を結んでいるようにできるグラフ
- 完全 2 部グラフ: Mの各頂点と Nの各頂点が結ばれている 2 部グラフ
- $K_{m,n}$: Mの頂点の個数が m，Nの頂点の個数が n ($m \leq n$) の完全 2 部グラフ

定義 (非閉路的グラフ，木)

- 非閉路的グラフ: 閉路を持たないグラフ
- 木 (tree): 有限連結な非閉路的グラフ

メモ 木の頂点と辺の個数定理

木の頂点の個数を p，辺の個数を qとすると

$$p = q + 1$$

メモ 甲子園

昭和 63 年の夏の甲子園は 49 校が出場し広島商業高校が優勝したが，全部で何試合あったか (引き分けはなかった)．

5.7 行列とグラフ

定義 (辺行列，隣接行列，接続行列)

G を頂点 $\{v_1, \cdots, v_m\}$，辺 $\{e_1, \cdots, v_n\}$ を持つグラフとする．

- 辺行列 $B = (b_{ij})$: 次のように定義される $n \times 2$ 行列

$$\{b_{i1}, b_{i2}\} = e_i$$

- 隣接行列 $A = (a_{ij})$: 次のように定義される $m \times m$ 行列

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (\{v_i, v_j\} \text{ が辺のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

- 接続行列 $M = (m_{ij})$: 次のように定義される $m \times n$ 行列

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i \in e_j \text{のとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

- 連結行列 $C = (c_{ij})$: 次のように定義される $m \times m$ 行列

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j \text{または } v_i \text{から } v_j \text{への道があるとき}) \\ 0 & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

定理 5.5

A を $m > 1$ 頂点からなるグラフ G の隣接行列とするとき,

$$A^n \text{の } ij \text{成分} = v_i \text{から } v_j \text{への歩道の個数}$$

命題

A を $m > 1$ 頂点からなるグラフ G の隣接行列とするとき，次の行列は G の連結行列と同じ 0 成分を持つ.

$$I + A + A^2 + \cdots + A^{m-1}$$

5.8 ラベル付きグラフ

定義（ラベル付きグラフ）

- ラベル付きグラフ: 辺あるいは頂点にデータが割り当てられているグラフ
- 重み付きグラフ: 辺に非負整数 (重み，長さ) が割り当てられているグラフ

5.9 グラフの同形性

定義（グラフの同形性）

グラフ $G(V, E)$ と $G^*(V^*, E^*)$ について，次のような 1 対 1 対応の関数 $f : V \to V^*$ が存在するとき G と G^*は同形な (isomorphic) グラフといわれ，fは G と G^*の間の同形写像 (isomorphism) といわれる.

$$\{u, v\} \in E \Longleftrightarrow \{f(u), f(v)\} \in E^*$$

定義 (グラフの同相性)

グラフ G と G^*について，同形なグラフから，辺に適当に頂点を加えることにより G と G^*が得られるとき，G と G^*は同相な (homeomorphic) グラフといわれる．

6 平面的グラフ，彩色，木

6.1 序

6.2 地図，領域

定義（平面的グラフ，地図，領域）

- 平面的グラフ: 辺が交差しないように平面上に描けるグラフまたは多重グラフ
- 地図，平面グラフ: 辺が交差しないように平面上に描かれた平面的グラフ
- 領域，面: 地図により分けられた平面上の部分
- 領域 r の次数 $\deg(r)$: 領域の境界の閉路または閉じた歩道の長さ

6.3 オイラーの公式

6.4 非平面的グラフ，クラトフスキーの定理

6.5 彩色グラフ

6.6 四色定理

6.7 木

6.8 根付き木

6.9 順序根付き木

7　有向グラフ，有限オートマトン

7.1　序

7.2　有向グラフ

7.3　基礎的な定義

7.4　ダイグラフ，関係，非負整数正方行列

7.5　最短道に関する Pruning アルゴリズム

7.6　有限状態機械

7.7　記号列，入出力テープ

7.8　有限オートマトン

8　組合せ解析

8.1　数え上げの基本原理

8.2　階乗の記法

8.3　2 項係数

8.4　順列

8.5　重複順列

8.6　組合せ

8.7　順序分割

8.8　樹形図

9　代数系，形式言語

9.1　演算と半群

9.2　自由半群，言語

9.3　文法と言語

9.4　群

9.5　部分群と正規部分群

9.6　環，整域と体

9.7　順序分割

10　順序集合と束

10.1　半順序集合

10.2　順序集合の図式

10.3　上限と下限

10.4　束

10.5　有限束

10.6　分配束

10.7　相補束

11　命題計算

11.1　文と複合文

11.2　連言

11.3　選言

11.4　否定

11.5　命題と真理表

11.6　恒真命題と矛盾命題

11.7　論理同値

11.8　命題代数

11.9　条件文と重条件文

11.10　論法

11.11　論理含意

12 ブール代数

12.1 基礎的な定義

12.2 双対性

12.3 基本的な定理

12.4 束としてのブール代数

12.5 表現定理

12.6 集合の加法標準形

12.7 加法標準形

12.8 スイッチング回路の設計

12.9 主項，合意法

12.10 ブール式の最簡形

12.11 カルノ図表