λ計算入門

田村直之 (tamura@kobe-u.ac.jp)
神戸大学工学部情報知能工学科

1　計算の理論とは

ヒルベルトの第 10 問題 (1900 年): 「不定方程式の有理整数解を存在するか否かを有限回の手段で判定すること」を契機として，**計算可能性** (computability) が研究されるようになり (帰納的関数，チューリング機械，λ計算)，計算の理論として発展した (数学基礎論の一分野として)．

その後，計算機の発展にともない，プログラムの数学的取り扱いの必要性が増してきた．この要求が数学基礎論の研究と結びつき，従来のプログラミング言語とは異なる新しい計算モデルに基づいた言語が活発に研究されるようになった．

- ヒルベルトの第 10 問題 (1900 年): 2 未知数の場合: 肯定的解決 (A. Baker 1968)．一般の場合: 否定的解決 (Yu. V. Matiyasevich 1970)．
- 計算モデル: 関数型，論理型，代数型

2　λ項

定義 1 (λ項)

(1) 変数 (x, y, zなど) はλ項である．

(2) M, Nがλ項のとき，(MN) はλ項である．(適用)

(3) Mがλ項，x が変数のとき，$(\lambda x.M)$ はλ項である．(抽象化)

以上のように帰納的に定義される表現 (式) だけをλ項と呼ぶ．λ項の集合をΛで，変数 (無限個あるものとする) の集合を$\mathcal{V}$で表す．またλ項 L, Mが表現として一致していることを $L \equiv M$で表す．λ項 Mがλ項 Nの部分に現れている時，Mを Nの**部分項**という (ただし $(\lambda x.y)$ などでの x は部分項とはしない)．

略記規則

- $M_1 M_2 \cdots M_n$は $((\cdots(M_1 M_2)\cdots)M_n)$ の略記
- $\lambda x_1 \cdots x_n.M$は $(\lambda x_1.\cdots(\lambda x_n.M)\cdots)$ の略記
- λ項の最外側のカッコは省略してよい

問題 1　次のうちどれがλ項か．x, xy, $\lambda x.y$, xyz, λxy, $(\lambda x.(\lambda y.(yz)))$, $\lambda xy.yz$, $\lambda xx.x$

答　λxy以外

問題 2　次のλ項を略記せずに表せ．xyz, $\lambda xy.xy$, $\lambda xyz.xyz$

答　$((xy)z)$, $(\lambda x.(\lambda y.(xy)))$, $(\lambda x.(\lambda y.(\lambda z.((xy)z))))$

問題 3　次のλ項をできるだけ簡単になるように略記せよ．$(((xy)(xy))z)$, $(\lambda x.(\lambda y.(xy)))$, $(\lambda x.(\lambda y.x)y)$, $((\lambda x.(\lambda y.((xy)x)))z)$

答　$xy(xy)z$, $\lambda xy.xy$, $\lambda x.(\lambda y.x)y$, $(\lambda xy.xyx)z$

問題 4 次のλ項の部分項をすべて求めよ．$x(xy)z$, $(\lambda xy.x)(\lambda y.y)z$

答 $x, y, xy, x(xy), z, x(xy)z$，および $x, \lambda y.x, \lambda xy.x, y, \lambda y.y, (\lambda xy.x)(\lambda y.y), z, (\lambda xy.x)(\lambda y.y)z$

定義 2 (変数の出現) λ項 M 中に変数 x が部分項として (一回以上) 現れている時，それぞれの変数 x を，左から順番に，Mにおける変数 x の 1 番目の出現，2 番目の出現…と呼ぶ．$\lambda x.x$ において，λx の x は部分項ではないことに注意．したがって一番右の x が変数 x の 1 番目の出現である．

定義 3 (自由変数，束縛変数) Mをλ項，x を M中に出現している変数とする．変数 x の出現が，Mのある部分項 $(\lambda x.N)$ の N中である時，その出現は束縛されている (bound) という．束縛されていない出現は自由 (free) という．M中に自由な出現を持つ変数を Mの自由変数と呼ぶ．Mの自由変数の集合を$\mathcal{V}(M)$で表す．自由変数でない変数を束縛変数と呼ぶことがある (厳密にはどの出現かを指定しないと意味がないが)．

問題 5 次のλ項について，変数の自由な出現をすべて答えよ．$\lambda x.x(\lambda y.xyz)y$, $(\lambda x.x(\lambda x.x))x$

答 $\lambda x.x(\lambda y.xy\underline{z})\underline{y}$, $(\lambda x.x(\lambda x.x))\underline{x}$

問題 6 次のλ項について自由変数の集合を求めよ．$\lambda x.xy(\lambda y.xyz)$, $(\lambda x.x(\lambda z.x)yz)(\lambda y.x)$

答 $\mathcal{V}(\lambda x.xy(\lambda y.xyz)) = \{y, z\}$, $\mathcal{V}((\lambda x.x(\lambda z.x)yz)(\lambda y.x)) = \{x, y, z\}$

定義 4 (コンビネータ) 自由変数を含まないλ項をコンビネータ，あるいは閉じたλ項という．以下のコンビネータは以降の説明で用いることがある．

$$\mathbf{I} \equiv \lambda x.x, \quad \mathbf{T} \equiv \lambda xy.x, \quad \mathbf{F} \equiv \lambda xy.y, \quad \mathbf{\Omega} \equiv (\lambda x.xx)(\lambda x.xx)$$

3 α合同，β簡約

定義 5 (α合同) $\lambda x.zx(\lambda y.xy)$ と$\lambda u.zu(\lambda v.uv)$ のように，束縛変数の名前が違うだけのλ項は同じと考えたほうが都合が良い．この同値関係を$=_\alpha$で表す．

定義 6 (代入) M, Nをλ項，x を変数とする時，$M[N/x]$ は次のように帰納的に定義されるλ項である．$M[N/x]$ は，Mでの変数 x の自由な出現すべてを Nで置き換えたλ項を表している．

(1) Mが変数 yのとき，$y \equiv x$ ならば $M[N/x] \equiv N$，$y \not\equiv x$ ならば $M[N/x] \equiv y$

(2) Mが $(M_1 M_2)$ のとき，$M[N/x] \equiv (M_1[N/x] M_2[N/x])$

(3) Mが $(\lambda y.M_1)$ のとき，$M[N/x] \equiv (\lambda z.M_2[N/x])$．ただし $(\lambda y.M_1) =_\alpha (\lambda z.M_2)$ かつ $z \not\equiv x$ かつ $z \notin \mathcal{V}(N)$

問題 7 次の代入の結果を求めよ．$x[y/x]$, $x[z/y]$, $(xy)[\lambda y.y/x]$, $x(\lambda y.x)[y/x]$, $(\lambda y.xy)[y/x]$, $(\lambda y.xy)[(\lambda y.y)z/x]$, $((\lambda y.xy)(\lambda z.xz))[\lambda z.yz/x]$

答 y, x, $(\lambda y.y)y$, $y(\lambda z.y)$, $\lambda z.yz$, $\lambda y.(\lambda y.y)zy$, $(\lambda z.(\lambda z.yz)z)(\lambda z.(\lambda z.yz)z)$

問題 8 (3) の $z \notin \mathcal{V}(N)$ の条件はなぜ必要か説明せよ．

答 $(\lambda y.xy)[y/x]$ の結果は$\lambda z.yz$などとするべきで，$\lambda y.yy$では良くない．

定義 7 (β簡約) λ項上の 2 項関係$\to_\beta$ (β簡約，β-reduction と呼ぶ) を次のように定義する．

$M \to_\beta N \iff$ Mのある部分項 $(\lambda x.M_1)N_1$を $M_1[N_1/x]$ で置き換えたλ項 (あるいはそれとα合同なλ項) が Nである．

上の部分項 $(\lambda x.M_1)N_1$をβ**可簡約項** (β-redex) と呼ぶ．また $M_1 \to_\beta M_2, M_2 \to_\beta M_3, \ldots$ であるとき，

$$M_1 \to_\beta M_2 \to_\beta M_3 \to_\beta \cdots$$

と表し，β**簡約経路**と呼ぶ．

問題 9 次のうち正しいβ簡約はどれか．$(\lambda x.(\lambda y.y)x)y \to_\beta (\lambda y.y)y$, $(\lambda x.(\lambda y.y)x)y \to_\beta (\lambda x.x)y$, $(\lambda x.(\lambda y.xy)x)y \to_\beta (\lambda y.yy)x$, $\mathbf{\Omega} \to_\beta \mathbf{\Omega}$

答 3 番目のみ正しくない．

問題 10 次のλ項から始まるβ簡約経路をすべて示せ．$\mathbf{II}$, $\mathbf{\Omega}$, $(\lambda x.\mathbf{I}x)(\lambda x.\mathbf{I}x)$, $\mathbf{I}(\mathbf{I\Omega})$

答 $\mathbf{II} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$, $\mathbf{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{\Omega}$, 以下省略

定義 8 ($\twoheadrightarrow_\beta$, β合同) 関係$\to_\beta$の反射的推移的閉包を$\twoheadrightarrow_\beta$で表す ($\twoheadrightarrow_\beta$をβ簡約と呼ぶこともある)．また “$M \to_\beta N$または $N \to_\beta M$” で定義される関係の反射的推移的閉包を$=_\beta$ (β合同と呼ぶ) で表す．

$=_\beta$は同値関係である．

問題 11 $\mathbf{T}MN \twoheadrightarrow_\beta M$, $\mathbf{F}MN \twoheadrightarrow_\beta N$を確かめよ．

問題 12 $(\lambda x.\mathbf{I}x)\mathbf{I} =_\beta \mathbf{I}(\lambda x.\mathbf{I}x)$ を確かめよ．

問題 13 $M =_\beta N$だが，$M \twoheadrightarrow_\beta N$でも $N \twoheadrightarrow_\beta M$でもない例を挙げよ．

答 $(\lambda x.\mathbf{I}x)\mathbf{I} =_\beta \mathbf{I}(\lambda x.\mathbf{I}x)$

問題 14 $=_\beta$が同値関係であることを証明せよ．

答 $=_\beta$は，“$M \to_\beta N$または $N \to_\beta M$” で定義される関係の反射的推移的閉包であるから，反射的かつ推移的である．また$=_\alpha$が対称的であることから対称的であることもわかる (対称的な関係の反射的推移的閉包も対称的)．

4 正規形と Church-Rosser の定理

定義 9 (β正規形) 部分項にβ可簡約項を含まないλ項をβ**正規形**という．$M \twoheadrightarrow_\beta N$かつ Nがβ正規形であるとき，Mはβ正規形を持つという．

問題 15 次のうちβ正規形はどれか．x, xy, $\mathbf{I}$, $\mathbf{II}$, $\mathbf{\Omega}$

答 x, xy, $\mathbf{I}$

問題 16 次のうちβ正規形を持つのはどれか．またβ正規形を持つ場合，それはどのようなλ項か．$\mathbf{II}$, $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{TI\Omega}$

答 $\mathbf{II} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$, $\mathbf{TI\Omega} \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{I}$

定理 1 (Church-Rosser の定理) 任意のλ項 M，Nについて次が成り立つ．

$$M =_\beta N \Longrightarrow \exists L(M \twoheadrightarrow_\beta L \text{ かつ } N \twoheadrightarrow_\beta L)$$

証明は参考文献を参照．

問題 17 Church-Rosser の定理を用いて，$M \twoheadrightarrow_\beta M_1$, $M \twoheadrightarrow_\beta M_2$のとき，$M_1$と M_2が合流する，すなわち $\exists L(M_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $M_2 \twoheadrightarrow_\beta L)$ であることを証明せよ．

答 $M_1 =_\beta M_2$より明らか．

問題 18 Church-Rosser の定理を用いて，任意のλ項は高々1つのβ正規形しか持たないことを証明せよ．

答 Mが二つのβ正規形 M_1, M_2を持つとすると，$M \twoheadrightarrow_\beta M_1$, $M \twoheadrightarrow_\beta M_2$であるから，ある$\lambda$項 L が存在して $M_1 \twoheadrightarrow_\beta L$ かつ $M_2 \twoheadrightarrow_\beta L$ である．M_1は正規形より $M_1 =_\alpha L$，M_2も同様に $M_2 =_\alpha L$．したがって $M_1 =_\alpha M_2$．

5 λ計算可能性

定義 10 (λ項での順序対の表現) λ項 M, Nの順序対を表すλ項を以下のように定義し，$\langle M, N\rangle$ と表記する．

$$\langle M, N\rangle \quad \equiv \quad \lambda z.zMN$$

問題 19 $\langle M, N\rangle\,\mathbf{T} \twoheadrightarrow_\beta M$, $\langle M, N\rangle\,\mathbf{F} \twoheadrightarrow_\beta N$を確かめよ．

定義 11 (λ項での自然数の表現) 自然数 $n \geq 0$ を表すλ項 $\lceil n\rceil$ を以下のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}\lceil 0\rceil &\equiv \mathbf{I} \\ \lceil n+1\rceil &\equiv \langle \mathbf{F}, \lceil n\rceil\rangle\end{aligned}$$

問題 20 $\lceil 0\rceil$, $\lceil 1\rceil$, $\lceil 2\rceil$ は具体的にはどのようなλ項か．

答 $\lceil 0\rceil \equiv \lambda x.x$, $\lceil 1\rceil \equiv \lambda z.z(\lambda xy.y)(\lambda x.x)$, $\lceil 2\rceil \equiv \lambda z.z(\lambda xy.y)(\lambda z.z(\lambda xy.y)(\lambda x.x))$

定義 12 (後者関数，前者関数，零述語) λ項 S, P, Z を以下のように定義する

$$\begin{aligned}\mathrm{S} &\equiv \lambda n.\langle \mathbf{F}, n\rangle \\ \mathrm{P} &\equiv \lambda n.n\mathbf{F} \\ \mathrm{Z} &\equiv \lambda n.n\mathbf{T}\end{aligned}$$

問題 21 $\mathrm{S}\lceil n\rceil \twoheadrightarrow_\beta \lceil n+1\rceil$ を確かめよ．
問題 22 $\mathrm{P}\lceil 0\rceil \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{F}$ を確かめよ．
問題 23 $\mathrm{P}\lceil n+1\rceil \twoheadrightarrow_\beta \lceil n\rceil$ を確かめよ．
問題 24 $\mathrm{Z}\lceil 0\rceil \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{T}$ を確かめよ．
問題 25 $\mathrm{Z}\lceil n+1\rceil \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{F}$ $(n \geq 0)$ を確かめよ．

定理 2 (不動点定理) 任意のλ項 Fについて，$FX =_\beta X$となるλ項 Xが存在する．コンビネータ $\mathbf{Y}$を次のようにおくと，λ項 $\mathbf{Y}F$はその一つである．

$$\mathbf{Y} \quad \equiv \quad \lambda f.(\lambda x.f(xx))(\lambda x.f(xx))$$

問題 26 $\mathbf{Y}F =_\beta F(\mathbf{Y}F)$ を確かめよ．

答 $\mathbf{Y}F \twoheadrightarrow_\beta (\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)) \twoheadrightarrow_\beta F((\lambda x.F(xx))(\lambda x.F(xx)))$

不動点定理を用いると，自然数上の計算可能な関数をλ項で表現することができる．

たとえば，自然数上の加算を行う関数 $\mathrm{add}(x, y)$ をλ項で表現してみよう．まず $\mathrm{add}(x, y)$ は次のように帰納的に定義できる．

$$\mathrm{add}(x, y) \quad = \quad \begin{cases} y & x = 0 \text{ のとき} \\ \mathrm{add}(x-1, y) + 1 & x > 0 \text{ のとき}\end{cases}$$

これをλ項で表現すると以下のようになる．

$$\mathrm{A} =_\beta \lambda xy.\mathrm{Z}xy(\mathrm{S}(\mathrm{A}(\mathrm{P}x)y)) =_\beta (\lambda fxy.\mathrm{Z}xy(\mathrm{S}(f(\mathrm{P}x)y)))\mathrm{A}$$

したがって不動点定理より，以下のように A を定義できる．

$$\mathrm{A} \quad \equiv \quad \mathbf{Y}F \quad (\text{ただし } F \equiv \lambda fxy.\mathrm{Z}xy(\mathrm{S}(f(\mathrm{P}x)y)))$$

問題 27　$\mathbf{Y}F =_\beta \lambda xy.\mathrm{Z}xy(\mathrm{S}((\mathbf{Y}F)(\mathrm{P}x)y))$ を確かめよ．

問題 28　$\mathrm{A}\ulcorner 0\urcorner\ulcorner m\urcorner \twoheadrightarrow_\beta \ulcorner m\urcorner$ を確かめよ．

問題 29　$\mathrm{A}\ulcorner 1\urcorner\ulcorner m\urcorner \twoheadrightarrow_\beta \ulcorner m+1\urcorner$ を確かめよ．

問題 30　$\mathrm{A}\ulcorner n\urcorner\ulcorner m\urcorner \twoheadrightarrow_\beta \ulcorner n+m\urcorner$ を証明せよ．

答　n についての数学的帰納法で証明する．

減算，乗算についても加算と同様にλ項で表現できる．たとえば，減算関数 $\mathrm{minus}(x,y)$ は以下の帰納的定義をもとにする．

$$\mathrm{minus}(x,y) \quad = \quad \begin{cases} x & y=0 \text{ のとき} \\ \mathrm{minus}(x,y-1)-1 & y>0 \text{ のとき} \end{cases}$$

問題 31　減算を行うλ項を定義せよ (前者関数 P を変更する必要がある)．

答　$\mathbf{Y}(\lambda fxy.\mathrm{Z}yx((\lambda z.\mathrm{Z}zz(\mathrm{P}z))(fx(\mathrm{P}y))))$

問題 32　乗算を行うλ項を定義せよ．

答　$\mathbf{Y}(\lambda fxy.\mathrm{Z}xx(\mathrm{A}(f(\mathrm{P}x)y)y))$

以上のような関数だけでなく，計算可能なすべての関数はλ項で計算可能である．

問題 33　[研究課題] λ計算を行う処理系を作成せよ．

6　関数型プログラミング言語

λ計算に基づいたプログラミング言語として，関数型プログラミング言語がある．関数型プログラミング言語としては Lisp, ML などがある (Lisp はλ計算に基づいているとは言えない点もあるが)．詳しくは参考文献を参照．

参考文献

- 林晋，八杉満利子: 「情報系の数学入門」，オーム社 (2300 円)
- 井田哲雄: 「計算モデルの基礎理論」，岩波講座ソフトウェア科学 第 12 巻 (3700 円)
- 林晋: 「数理論理学」，コロナ社
- R. バード，P. ワドラー: 「関数プログラミング」，近代科学社 (4500 円)
- 淵一博，黒川利明: 「新世代プログラミング」，共立出版